13/11/19

§2. Τριγωνομετρικά Πολυώνυμα

(1) • <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $e_n(x) = e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Το n ονομάζεται συχνότητα κ. η e_n εκθετική με συχνότητα n.

⊕

<u>Τριγωνομετρικό πολυώνυμο</u> λέγεται κάθε συνάρτηση της μορφής: $P(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e_k(x)$, $p_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{-N, \ldots, N\}$

⊕

<u>Βαθμός του $P(x)$ (degree)</u> είναι η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή συχνότητα με συντελεστή $p_k \neq 0$

Π.χ. $p(x) = 3e^{-inx} + 2 + e^{ix} + 0 \cdot e^{i \cdot 5x}$

$\deg p(x) = |-4| = 4$

<u>Σχόλιο</u>: Το $e_n(x)$ έχει περίοδο $T = 2\pi$ που δεν είναι η ελάχιστη, αν $n \neq \pm 1$

Διότι, $e^{in(x+T)} = e^{inx}$, T περίοδος

$\Leftrightarrow \cancel{e^{inx}} e^{inT} = \cancel{e^{inx}}$

$\Leftrightarrow e^{inT} = 1 \Leftrightarrow nT = 2k\pi \Leftrightarrow T = \frac{2k\pi}{n}$

Για $k=1$: $T_0 = \frac{2\pi}{n}$: ελάχιστη περίοδος ∎

(2) <u>Τριγωνομετρική παράσταση</u>

Έστω $P(x)$ τριγων. πολ/μο, $\deg P(x) = N$

$P(x) = p_{-N} e^{-iNx} + \ldots + p_{-1} e^{-i \cdot 1 \cdot x} + \ldots + p_N e^{iNx}$ (εκθετική παράσταση)

Τώρα: $p_{-k} e^{-ikx} + p_k e^{ikx} = p_{-k}(\cos kx - i\sin kx)$

$+ p_k(\cos kx - i\sin kx)$

$= \cos kx \cdot (p_{-k} + p_k) + i\sin x (p_k - p_{-k})$

Θέτω: $a_k = p_k + p_{-k}$

$b_k = i(p_k - p_{-k})$ $\quad 1 \leq k \leq N$

$a_0 = \frac{p_0}{2}$

Τότε, το $p(x)$ γράφεται:

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (3)$$

Η (1) λέγεται αλγεβρική μορφή του τριγ. πολ.
Η (3) λέγεται τριγωνομετρική μορφή του τριγ. πολ.

Παρατήρηση: Οι όροι της τριγων. μορφής είναι μοναδικοί

(3) Πρόταση (Μοναδικότητα Συντελεστών):
Έστω $p(x) = \sum_{-N}^{N} p_k e^{ikx}$, $q(x) = \sum_{-M}^{M} q_k e^{ikx}$ δύο τριγωνομ.

πολ/μα κ. $p(x) = q(x)$. (κ. ίδιο βαθμό)
Τότε τα $p(x), q(x)$ έχουν ίδιους συντελεστές
(Δηλ. π.χ. αν $N \geq M$ τότε $p_k = 0$, $N \geq |k| > M$ κ.
$p_k = q_k$: $|k| \leq M$)

ΑΠΟΔ.:
Θέτω $z = e^{ix}$ κ. $p(e^{ix}) = q(e^{ix}) = p(z) = q(z)$ π.ο. τον κύκλο $\{|z|=1\}$
Τότε $p(z) = \frac{p_{-N}}{z^n} + \dots + p_0 + \dots + p_z z^n$, $z = e^{ix}$

Όμως $p(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ολόμορφη (ως άθροισμα ολόμορφων συν/σεων) κ.
$q(z) = \frac{p_{-N}}{z^m} + \dots + p_m z^m$ ολόμορφη

κ. $p(z) = q(z)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.
Τότε από αρχή αναλυτικής συνέχειας $\Rightarrow p(z) = q(z)$ $\forall z \in$
θ. Laurent $\Rightarrow p(z), q(z)$ έχουν ίδιους συντελεστές

$\Rightarrow (p(z) = q(z)$ στο A με σ.σ. $\Rightarrow p(z) = q(z)$ $\forall z$

ΥΠΕΝΘ.: $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$
$= \lim_{N \to \infty} (a_N z^{-N} + \dots + a_N z^N)$ κ. οι συντ. a_n είναι μοναδικοί
(Ανάπτ. Laurent)

HW: Άσκηση 2.7 Σημειώσεις σελ. 30

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx} = q(x) = \sum_{k=-M}^{M} q_k e^{ikx}$$

Ν.δ.ο. $p_k = q_k$

ΥΠΟΛ.: Χ.β.γ. υποθ. ότι $N = M$

$$\sum_{k=-N}^{N} (p_k - q_k) e^{ikx} = 0 \quad \text{(από υπόθεση)}$$

$$\overset{\text{πολ/ζω με}}{\underset{e^{iNx}}{\Longleftarrow}} \underbrace{(p_{-N} - q_{-N})}_{r_0} + \underbrace{(p_{-(N-1)} - q_{-(N-1)})}_{r_1} e^{ix}$$

$$+ \underbrace{(p_{-(N-2)} - q_{-(N-2)})}_{r_2} e^{i2x} + \dots + \overbrace{(p_N - q_N)}^{r_n} e^{i2Nx} = 0$$

Δηλ. $r_0 + r_1 e^{ix} + r_2 (e^{ix})^2 + \dots + r_{2N} (e^{ix})^{2N} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_{2N} < 2N$$

$$r_0 \cdot \underbrace{(e^{ia_1})^0}_{1} + r_1 \underbrace{(e^{ia_j})}_{x_j} + r_2 \underbrace{(e^{ia_j})^2}_{x_j^2} + \dots + r_{2N} \overbrace{(e^{ia_j})^{2N}}^{x_j^{2N}} = 0$$

$$j = 0, 1, \dots, 2N$$

§3. Εσωτερικό γινόμενο - Καθετότητα

Σχόλιο: $a = (a_1, \dots, a_n) \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

$$a \cdot b = \langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

$$\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$$

$a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}$

$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \bar{b}_j$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω V δ.χ. επί του $\mathbb{C}$.

$\langle \, , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ λέγεται εσωτερικό γινόμενο αν-ν

1. $\langle a, b\rangle = \overline{\langle b, a\rangle}$
2. $\langle \kappa a + \ell b, c\rangle = \kappa \cdot \langle a, c\rangle + \ell \cdot \langle b, c\rangle \quad \forall \kappa, \lambda, a, b, c \in \mathbb{C}$
3. $\langle a, a\rangle \geq 0$

   "$=$" $\iff a = 0$

$$\langle a, \kappa b + \ell c\rangle \overset{1}{=} \overline{\langle \kappa\ell + bc, a\rangle}$$
$$\overset{2}{=} \overline{(\kappa \cdot \langle b, a\rangle + \ell \cdot \langle c, a\rangle)}$$
$$= \overline{\kappa} \cdot \overline{\langle b, a\rangle} + \overline{\ell} \cdot \overline{\langle c, a\rangle}$$
$$\overset{1}{=} \overline{\kappa} \cdot \langle a, b\rangle + \overline{\ell} \cdot \langle a, c\rangle$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $V = R(\mathbb{T}) = \{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \}$

$= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ 2π-περιοδική, f $\mathbb{R}$-ολοκλ. $\}$

$C(\mathbb{T}) \subseteq R(\mathbb{T})$

υπόχωρος

Θέτουμε $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)\,dx$

Εύκολα αποδ. ότι είναι εσωτ. γινόμενο:

$$\langle g, f\rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(x)\overline{f(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \overline{\overline{g}(x) f(x)}\,dx$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)\,dx} = \overline{\langle f, g\rangle}$$

... ευθεία , τότε το ... του
α

$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$

από

Πυθαγόρειο θεώρημα

$f_1, \dots, f_n \in R(T)$

$f_j \perp f_k$ για $j \neq k$ (δηλ. $\langle f_j, f_k \rangle = 0$)

$\Rightarrow \|f_1 + \dots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \dots + \|f_n\|_2^2$

Αποδ.

• $n=2$:
$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|_2^2 &= \langle f_1 + f_2, f_1 + f_2 \rangle \\ &= \langle f_1, f_1 + f_2 \rangle + \langle f_2, f_1 + f_2 \rangle \\ &= \langle f_1, f_1 \rangle + \cancel{\langle f_1, f_2 \rangle}^{0} + \cancel{\langle f_2, f_1 \rangle}^{0} + \langle f_2, f_2 \rangle \\ &= \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2\end{aligned}$$

$\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|^2 = \|f_1 + f_2\|^2 + \|f_3\|^2 + \dots + \|f_{n-1}\|^2$

από επαγωγική υπόθεση

$= \dots$

Εσωτ. γινόμενα με τριγων. πολυώνυμα:

1) $e_n(x) = e^{inx}$

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}$$

$$\left(n \neq 0 \Rightarrow e^{inx} = \left(\frac{1}{in} e^{inx}\right)' \right)$$

2) $n \neq m$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = 0$$

$\longrightarrow$

3) $n=m$

$$\|e_n\|^2 = \langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (e^{inx})^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\, dx = 1$$

δηλ. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα για τον $R(\mathbb{T})$

4) $p(x) = \sum_{-N}^{N} p_k e^{ikx} \Rightarrow \|p(x)\|^2 = \sum_{k=-N}^{N} |p_k|^2$

$$p_k e^{ikx} \perp p_j e^{ijx}, \quad k \neq j$$

$$\langle p_k e^{ikx}, p_j e^{ijx} \rangle = p_k p_j \overbrace{\langle e^{ikx}, e^{ijx} \rangle}^{0}$$

$$\langle p_k e^{ikx}, p_k e^{ikx} \rangle = \underbrace{p_k \bar{p}_k}_{=|p_k|^2} \langle e_k, e_k \rangle$$

5) $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e_k(x) \qquad q(x) = \sum q_i e_i(x)$

$$\langle p(x), e_j(x) \rangle = \langle \sum_{k=-N}^{N} p_k e_k(x), e_j(x) \rangle$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} p_k \langle e_k(x), e_j(x) \rangle = p_j$$

Αν $p(x) = q(x) \Rightarrow p_j = q_j \quad \forall j$

__Πρόταση:__ $(V, \langle , \rangle)$ χ. με εσωτ. γινόμενο $f_1, f_2, \dots, f_n$ κάθετα ανά δύο κ. μη μηδενικά $\Rightarrow f_1, f_2, \dots, f_n$ Γ.Α.

__Απόδ.:__

Έστω $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0 \sim (\lambda_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots)$

$\Rightarrow \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k, f_j \rangle = \langle 0, f_j \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i \langle f_i, f_j \rangle = 0$

$\Rightarrow \lambda_j = 0$

Πόρισμα: $\{e_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ Γ.Α.

HW: 2.12 iii) σελ. 33